

Geometrische Intuition – ein wichtiges Werkzeug zur Lösung von ebenen und räumlichen Extremwertaufgaben

Peter Paukowitsch, TU Wien

Beim Lösen von Extremwertproblemen kann man verleitet sein, die Aufgabenstellung ohne genaues Hinsehen möglichst rasch durch einen analytischen Ausdruck zu modellieren und dann die Analysis einzusetzen. Dieser Weg ist aber nur bei sehr einfachen Problemstellungen zielführend, ganz sicher aber nicht bei komplizierten mehrparametrischen Sachverhalten. Je komplexer das Problem ist, desto mehr wird eine vernünftige mathematische Strategie versuchen, vor dem Rechnen die Frage in ihrer Gesamtheit zu erfassen und Querverbindungen zu erkennen. Dazu ist natürlich einschlägige Erfahrung nötig. Sehr häufig kann so das Extremwertproblem vom „Extremal-Anteil“ getrennt werden: Es ist dann nur mehr das Erfassen einer konkreten Position erforderlich, die Diskussion des Grenzprozesses ist bereits erledigt.

Diese Art des intuitiven geometrischen Herangehens an ebene und räumliche Extremwertaufgaben - des „richtigen“ Anschauens - wird anhand der folgenden Aufgaben exemplarisch vorgestellt. Besonders gut zur Visualisierung der Aufgabenstellung und der Lösung eignen sich naturgemäß dynamische Softwarepakete. Die Figuren zu den ebenen Fragestellungen habe ich mit „EUKLID 1.5a – Geometrie (wie) mit Zirkel und Lineal“ angefertigt. Das „Herumziehen“ am Schirm ist natürlich instruktiver als das Ansehen der statischen Figuren in diesem Manuskript. Die räumlichen Figuren wurden mit den Zeichenpaketen CAD-2D und CAD-3D von O.Univ.Prof.Dr.H.Stachel (TU Wien) angefertigt.

1. Zwei klassische Extremwertaufgaben über Dreiecke

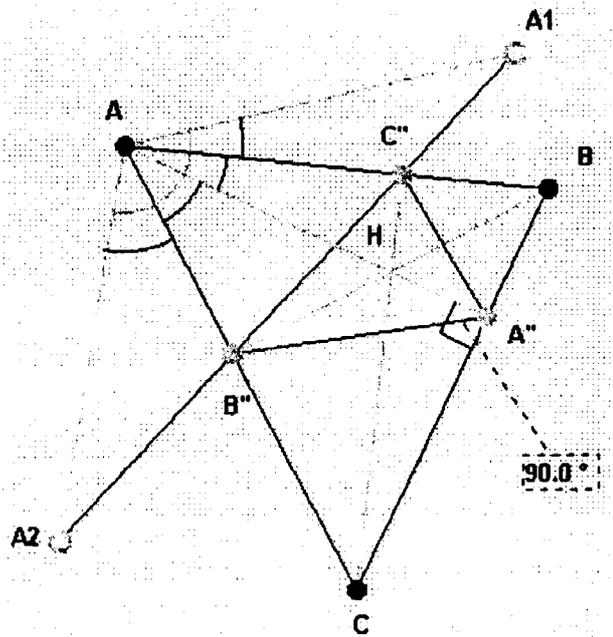
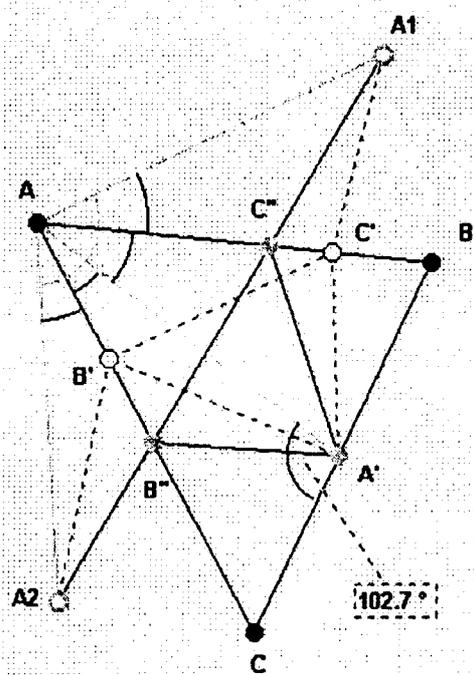
Geometrisches Werkzeug:	Spiegelung an einer Geraden, Peripheriewinkelsatz
Intuitiv verwendete Extremwerte:	Geraden sind Kürzeste, Normalabstand Punkt - Gerade
Einschlägige Themenkreise:	Feuerwehrproblem, Spinne - Fliege

1.1 Problem von Fagnano

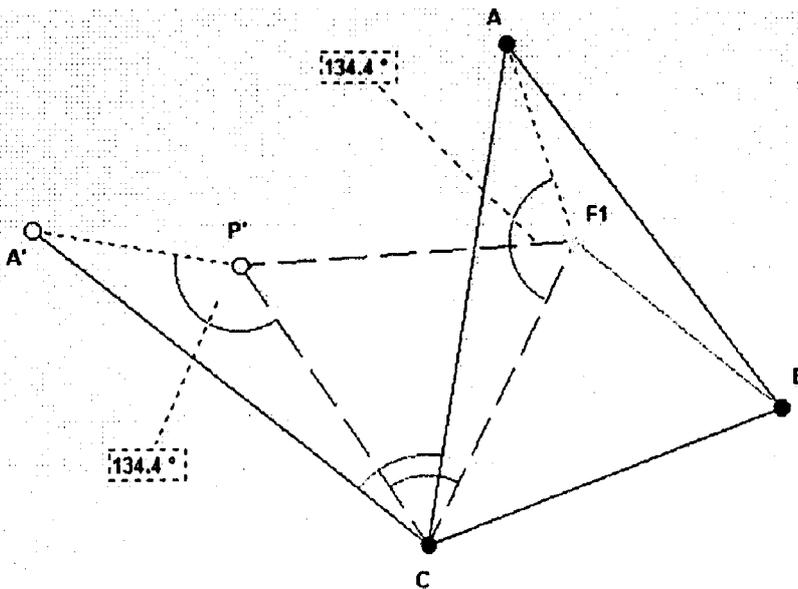
Gegeben ist ein Dreieck ABC . Gesucht sind jene Punkte A'', B'', C'' innerhalb der Seiten von ABC , sodaß der Umfang des Dreiecks $A''B''C''$ minimal ist.

Wir wählen zunächst A', B' und C' beliebig aus. Durch Spiegelung von A' an den Geraden AB bzw. AC erhalten wir die Punkte A_1 bzw. A_2 . Der Umfang des Dreiecks $A'B'C'$ findet sich daher im geknickten Streckenzug $A_1 - C' - B' - A_2$. Für jeden Startpunkt A' liefern die Punkte B'' und C'' in der Verbindungsgeraden A_1A_2 daher Minimierungen des Dreiecksumfanges. Wie ist A' zu wählen, sodaß insgesamt das absolute Umfangsminimum auftritt? Das Dreieck AA_1A_2 ist gleichschenkelig, wobei der Winkel bei A konstant ist. Die Basis A_1A_2 ist genau dann minimal, falls $AA_1 = AA_2$ minimal gewählt wird: A'' fällt in den Höhenfußpunkt von A .

Die Lösung des Fagnano-Problems ist daher das **Höhenfußpunktdreieck**; damit die Forderungen „Lösungsdreieck“ und „Punkte innerhalb“ realisierbar sind, muß das Ausgangsdreieck spitzwinkelig sein.



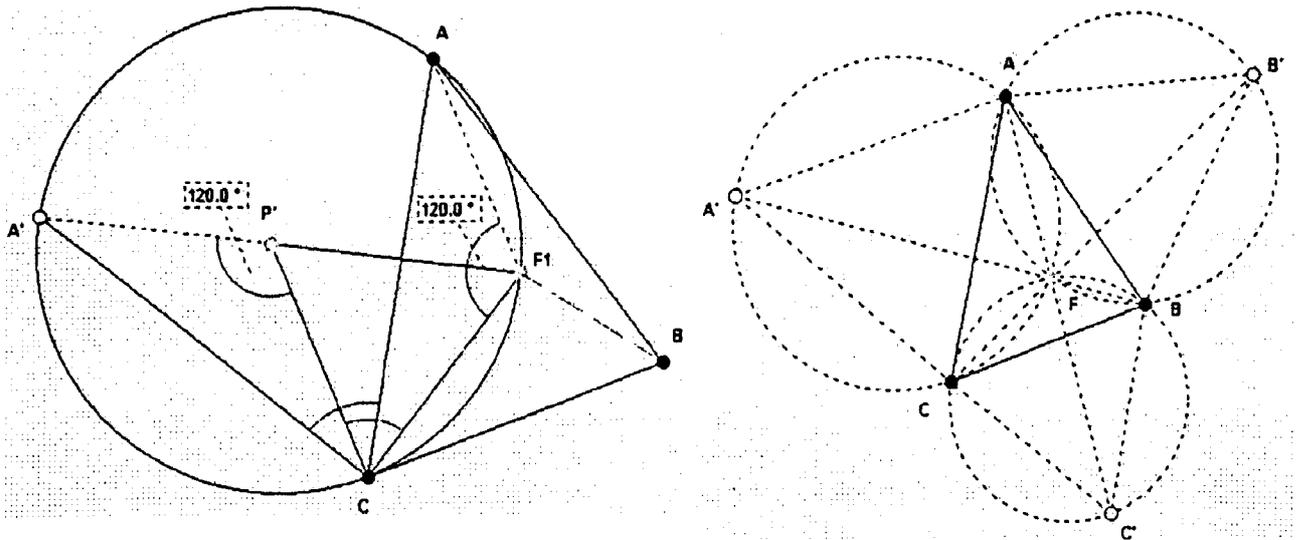
1.2 Problem von Fermat



Gegeben ist ein Dreieck ABC. Gesucht ist jener Punkt P der Dreiecksebene mit minimaler Abstandssumme zu den Eckpunkten des Dreiecks: **Fermat- oder Torricellipunkt.**

Wir wählen F_1 beliebig und drehen das Dreieck CF_1A um 60° nach außen. Das Dreieck CF_1P' ist gleichseitig, die Summe $F_1A + F_1B + F_1C$ tritt im geknickten Streckenzug $A' - P' - F_1 - B$ auf. Genau im Falle der geradlinigen Verbindung $A'B$ ist der Punkt F_1 optimal

gewählt: Bei P' und daher auch bei F_1 müssen 120° auftreten, und zwar bezüglich aller drei Seiten. Der Fermatpunkt kann daher unter Verwendung **entweder** des Peripheriewinkelsatzes **oder** dem Dreieck ABC nach außen aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken konstruiert werden (Die Innenwinkelmaße des Ausgangsdreiecks ABC müssen kleiner als 120° sein).



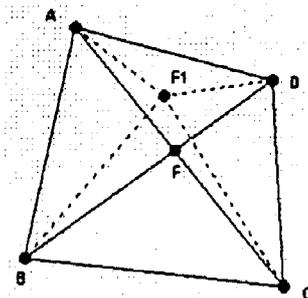
Zusatzinformationen:

Die Symmetriepunkte der drei nach außen aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke $AA'C$, $CC'B$ und $BB'A$ bestimmen ein gleichseitiges Dreieck, das **äußere Napoleondreieck** von ABC .

Werden allgemeiner drei solche Dreiecke nach außen aufgesetzt, für welche die Summe der „Fernwinkelmaße“ $AA'C + CC'B + BB'A = 180^\circ$ beträgt, so sind einerseits deren Umkreise kopunktal (P) und andererseits treten diese Fernwinkelmaße auch in jenem Dreieck auf, welches von den Umkreismittelpunkten gebildet wird. Die Verbindungsgeraden AC' , BA' , CB' der Eckpunkte mit den gegenüberliegenden Fernecken verlaufen allerdings nur dann durch P , falls die aufgesetzten Dreiecke zusätzlich untereinander ähnlich sind.

Verallgemeinerungen:

1) Für ein ebenes konvexes Viereck führt die Lösung der beschriebenen Aufgabe zum Schnittpunkt F der Diagonalen (Dreiecksungleichung anwenden).



2) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC (vgl. 2.3) ist jener Punkt der Dreiecksebene, für welchen die **Summe der Quadrate** der Abstände zu den Eckpunkten minimal ist; diese Aussage kann für endlich viele Punkte in einer Ebene verallgemeinert werden, und zusätzlich können die Punkte mit **unterschiedlichen Gewichten** behaftet werden.

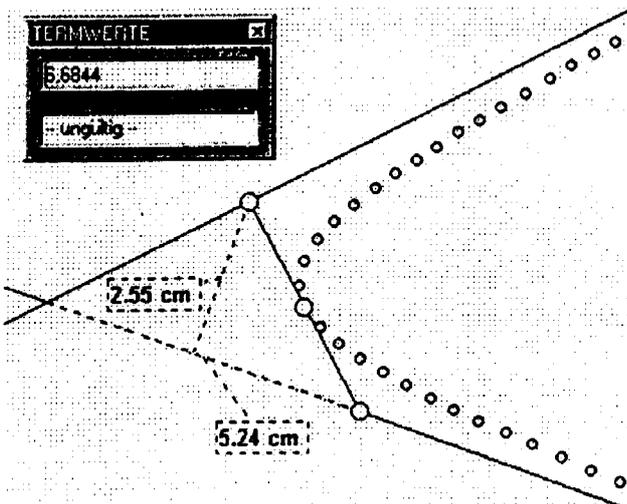
3) Ebenso können **räumliche Punktmen**gen betrachtet werden.

2. Was ist „der Schwerpunkt eines Dreiecks“ und drei Extremwertaufgaben im Zusammenhang damit

2.1 Flächenhalbierende - kopunktuale Flächenhalbierende und Flächenschwerpunkt – extreme Flächenhalbierende

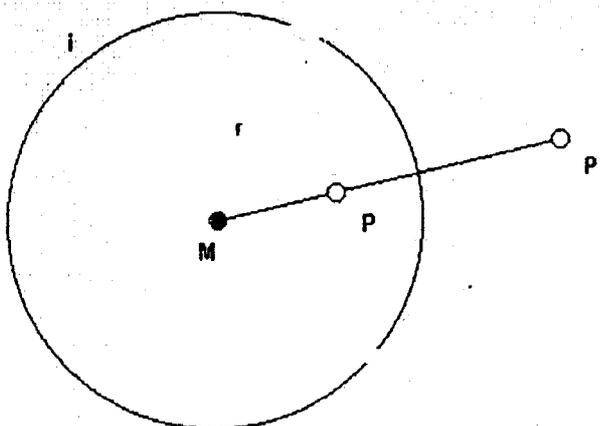
- Geometrisches Werkzeug: a) schülergerechter Standpunkt: flächenerhaltende Rechtecksverwandlungen, Hyperbelkonstruktionen
 b) höherer Standpunkt: Inversion an einem Kreis, Erzeugnis projektiver Punktreihen
- Intuitiv verwendete Extremwerte: Die Tangentenstrecke einer Hyperbeltangente zwischen den Asymptoten ist im Scheitel minimal
- Einschlägige Themenkreise: Schwerpunkt von ebenen Bereichen

Wir lösen uns zunächst von der Dreiecksaufgabe:



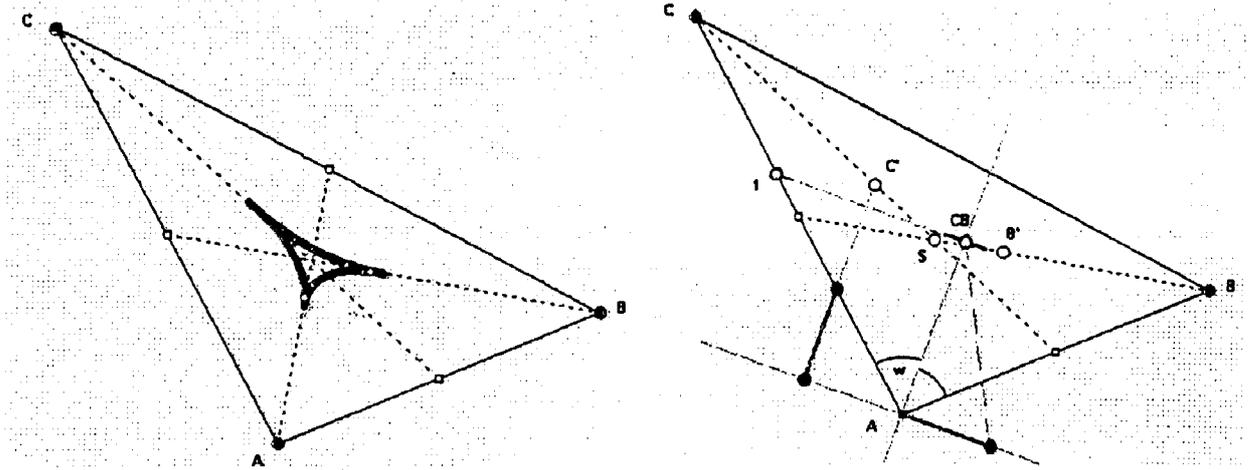
Die Hüllkurve eines Stabes, welcher aus zwei Geraden flächengleiche Dreiecke ausschneidet, ist ein Hyperbelbogen mit diesen Geraden als Asymptoten, wobei der Berührungspunkt in die Stabmitte fällt: Diese Aussage kann ohne Kenntnis von Hyperbeleigenschaften für den Graph der Funktion $x \rightarrow 1/x$ problemlos nachgerechnet werden; der Fall nichtorthogonaler Ausgangsgeraden kann unter Verwendung einer flächenerhaltenden Scherung parallel zur x-Achse auf diesen Sonderfall zurückgeführt werden.

Die Beziehung $a \cdot b = \text{konstant}$ tritt im Zusammenhang mit flächenerhaltenden Verwandlungen von Rechtecken oder Parallelogrammen auf und kann mittels Strahlensatz realisiert werden.

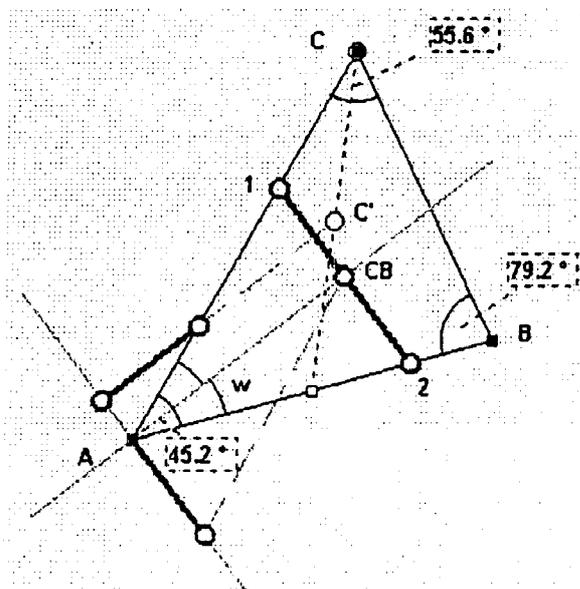


Inversion an einem Kreis I :
 $MP \cdot MP' = r^2$

Vom höheren Standpunkt führt $a \cdot b = \text{konstant}$ zum Begriff der **Inversion an einem Kreis**: Das ist eine kreistreue Bijektion der funktionentheoretisch abgeschlossenen euklidischen Möbiusebene (∞ mit $1/\infty = 0$); Geraden zählen ebenfalls zu den Kreisen, ihre Bilder unter der Inversion sind Kreise durch den Mittelpunkt des Inversionskreises. Mittels projektiver Geometrie erkennt man, daß der eingangs beschriebene Stab die Ausgangsgeraden nach projektiv gekoppelten Punktreihen schneidet, also einen Kegelschnitt einhüllt, welcher diese Geraden berührt, und zwar hier in Fernpunkten.



Die drei Hyperbelbögen berühren die Flächenhalbierenden durch A,B,C - also die „gewöhnlichen“ Schwerlinien - jeweils in deren Halbierungspunkt. Durch jeden Punkt des hyperbelförmig begrenzten Bereichs verlaufen drei kopunktale Flächenhalbierende. Insbesondere die Flächenhalbierenden durch A,B,C sind kopunktal: Dieser „gewöhnliche“ Schwerpunkt ist auch Flächenschwerpunkt des Dreiecks (Argumentation von *Archimedes*: Teilung des Dreiecks in „schmale“ Streifen parallel zu einer Seite; grundsätzlich ist Integration erforderlich). Die rechte Figur zeigt die Scheitelkonstruktion einer Hyperbel aus Asymptoten und einem Punkt („Stechzirkelkonstruktion“).



Die Scheiteltangenten der drei Hyperbelbögen führen zu **relativen Minima** der Strecken in Flächenhalbierenden. Die Scheiteltangente jenes Hyperbelbogens, welcher die Dreieckseiten zum kleinsten Winkelmaß $2w$ als Asymptoten besitzt, trägt dann die **kürzeste Strecke 12** in einer Flächenhalbierenden. Die Strecken A_1 bzw. AC_B ergeben sich unter Verwendung der Flächenformel $A = AB \cdot AC \cdot \sin(2w) / 2$ dann wie folgt:

$$(A_1)^2 = AC \cdot AB / 2$$

$$AC_B = A_1 \cdot \cos w$$

$$12 = 2 \cdot A_1 \cdot \sin w$$

(Die erste Formel läßt sich etwa mit dem Höhensatz graphisch auswerten)

Die Flächenhalbierenden durch A,B,C liefern **relative Maxima** der untersuchten Streckenlängen, die Flächenhalbierende durch jenen Eckpunkt, der zum kleinsten Winkelmaß gehört, führt zur **längsten** Strecke in den Flächenhalbierenden.

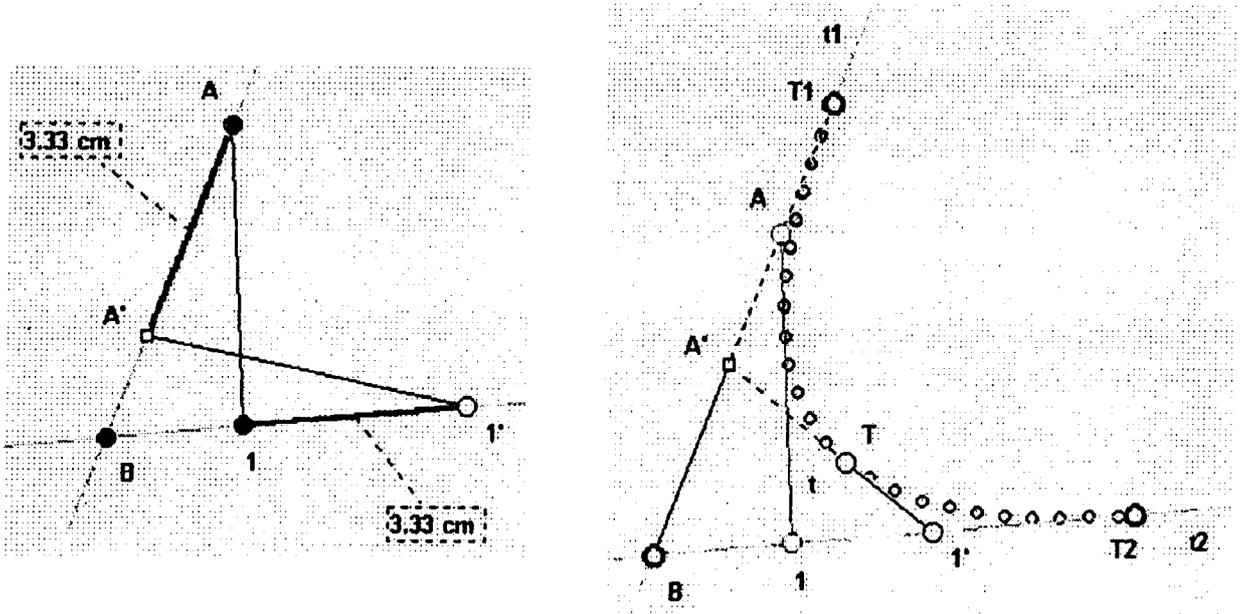
Zusatzinformationen:

Einige Konstruktionen des Flächenschwerpunktes F einer homogen mit Masse belegten viereckigen Platte finden sich bei *Zacharias*. In *Coxeter, Unvergängliche Geometrie*, wird ein Ergebnis von *Wittenbauer* angegeben: Zunächst drittelt man die Seiten des Vierecks und verbindet die den Ecken benachbarten Teilungspunkte. Es entsteht ein Parallelogramm, und dessen Mittelpunkt ist F .

2.2 Umfanghalbierende - kopunktale Umfanghalbierende und Umfangschwerpunkt – extremale Umfanghalbierende

Geometrisches Werkzeug:	a) schülergerechter Standpunkt: Parabelkonstruktion b) höherer Standpunkt: Erzeugnis kongruenter Punktreihen
Intuitiv verwendete Extremwerte:	Die Tangentenstrecke einer Parabeltangente zwischen zwei zur Parabelachse symmetrischen Tangenten ist im Scheitel minimal
Einschlägige Themenkreise:	Schwerpunkt von Massesystemen, insbesondere von Stabwerken

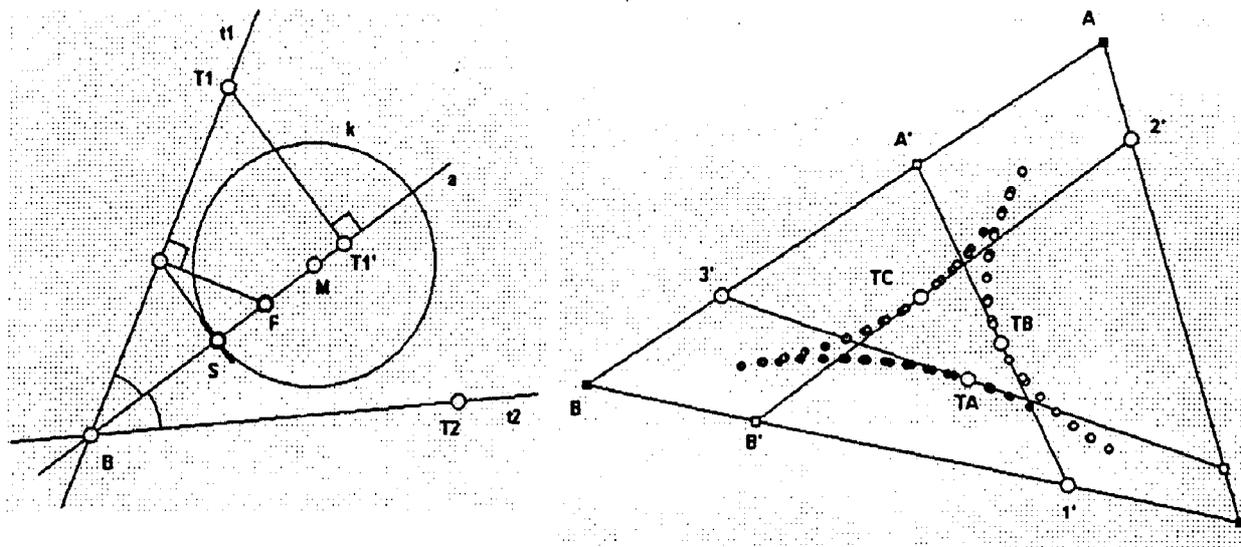
Zunächst betrachten wir die vom Dreieck losgelöste Aufgabe:



Gegeben sind zwei Geraden AB und $B1$. Von den Punkten A und 1 wird jeweils dieselbe Strecke $AA' = 11'$ abgetragen, und zwar einmal zu B hin, das andere Mal von B weg. Die Hüllkurve der Strecken $A'1'$ ist dann ein Parabelbogen („Fadenkonstruktion“ einer Parabel unter Verwendung von zwei Tangenten, welche zur Parabelachse symmetrisch sind). Die Geraden $AB = t_1$ und $B1 = t_2$ sind ebenfalls Parabeltangente, die Berührungspunkte T_1 bzw. T_2 findet man durch Streckenabtragen $B1 = AT_1$ bzw. $AB = 1T_2$. Wegen $T_1B = BT_2$ fällt die Parabelachse a in die Winkelsymmetrale der Ausgangsgeraden.

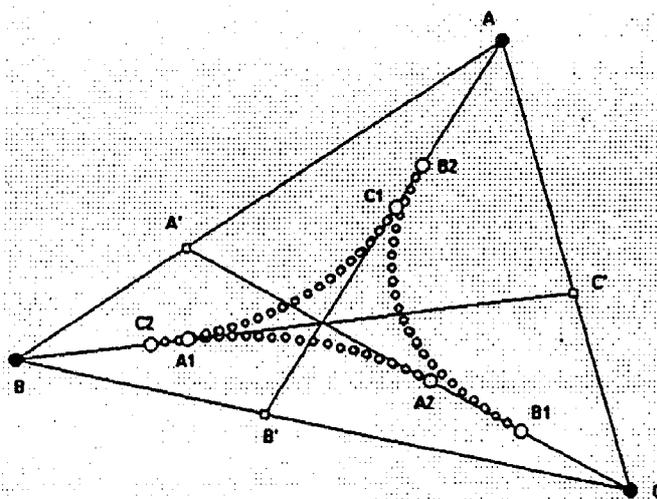
Der Berührungspunkt T der Parabeltangente t kann durch Teilverhältnisübertragen gefunden werden: $TV(B, A', T_1) = TV(1', T, A')$. Diese Konstruktion liegt übrigens dem de Casteljau-Algorithmus im CAGD zugrunde.

Die folgende linke Figur zeigt die Konstruktion des Scheitels S , des Brennpunktes F sowie des Mittelpunktes M des Scheitelkrümmungskreises k der Parabel.



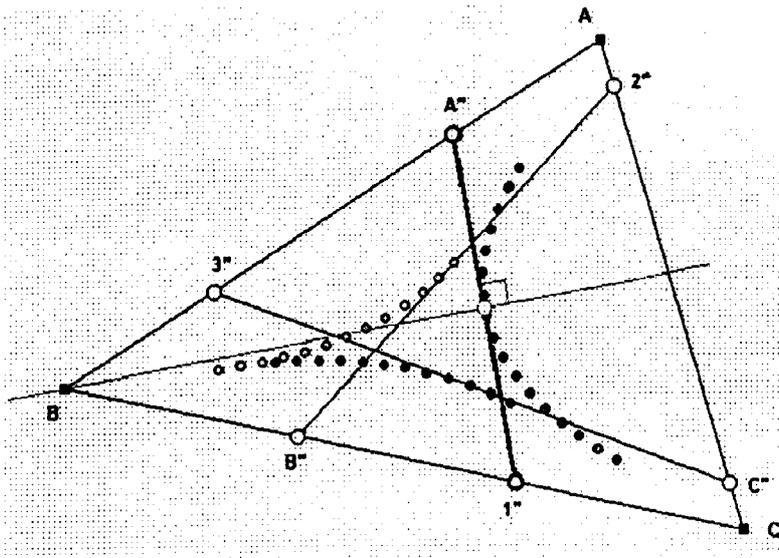
Ausgehend von einem beliebig gewählten Punkt A' in der Seite AB wird zunächst der halbe Dreiecksumfang $u/2$ über B nach $1'$ abgetragen. Die oberhalb beschriebene Konstruktion des Berührungspunktes T in der Parabeltangente $A'1'$ ist zweckmäßig als Makro „verpackt“ und liefert dann T_B usw.

Durch jeden Punkt des parabelförmig begrenzten Bereichs verlaufen drei kopunktale Umfanghalbierende. Insbesondere die Umfanghalbierenden durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC sind kopunktal: Dieser Nagel'sche Punkt ist aber im allgemeinen vom gewöhnlichen Schwerpunkt verschieden; die Punkte A', B', C' sind die Berührungspunkte der Ankreise des Ausgangsdreiecks ABC .



Unter Verwendung des *Satzes von Menelaos* ist durch Messen der Strecken $AA', A'B, \dots$ die kopunktale Lage unmittelbar ersichtlich, denn es gilt $(AA'/A'B) \cdot (BB'/B'C) \cdot (CC'/C'A) = 1$.

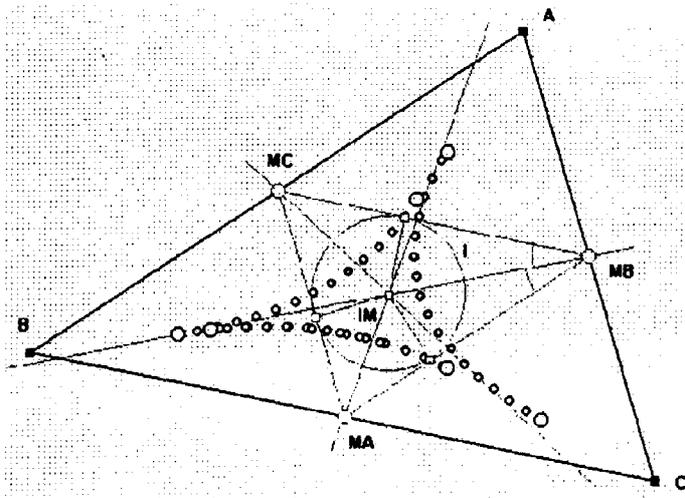
Die Umfanghalbierenden durch A, B, C berühren die Parabelbögen jeweils in verschiedenen Punkten ($A_2 \neq B_1, B_2 \neq C_1, C_2 \neq A_1$), falls sie nicht auch Winkelsymmetralen von ABC sind.



Die Scheiteltangenten der drei Parabelbögen führen zu **relativen Minima** der Strecken in Umfanghalbierenden. Die Scheiteltangente jenes Parabelbogens, welcher die Dreieckseiten zum kleinsten Winkelmaß berührt, trägt dann die **kürzeste Strecke** $A''1''$ in einer Umfanghalbierenden. Die Punkte A'' und $1''$ können über $BA'' = B1'' = u/4$ gefunden werden.

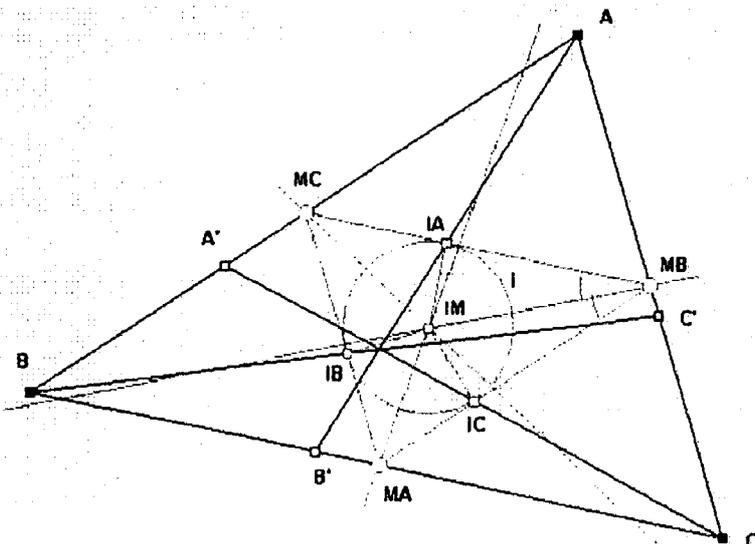
Die Umfanghalbierenden durch A,B,C liefern **relative Maxima** der untersuchten Streckenlängen, die Umfanghalbierende durch jenen Eckpunkt, der zum kleinsten Winkelmaß gehört, führt zur **längsten** Strecke in den Umfanghalbierenden.

Zusatzinformationen:



Der Inkreismittelpunkt I_M des Mittendreiecks $M_A M_B M_C$ ist der **Umfangschwerpunkt** des Dreiecks ABC (*Dirnböck*).

Der Beweis verwendet einerseits die mit den Seitenlängen gewichteten Punkte M_A , M_B und M_C und andererseits die bekannte Aussage, daß im Dreieck eine Winkelsymmetrale die Gegenseite im Verhältnis der beiden „Anseiten“ teilt.



Die Umfanghalbierenden durch die Eckpunkte des Ausgangsdreiecks ABC verlaufen durch die Berührungspunkte I_A , I_B , I_C des Inkreises i des Mittendreiecks $M_A M_B M_C$ mit dessen Seiten.

2.3 Halbierende des Eckendrehmoments - Eckenschwerpunkt = „der“ Schwerpunkt – extreme Geraden durch den Schwerpunkt

Geometrisches Werkzeug:

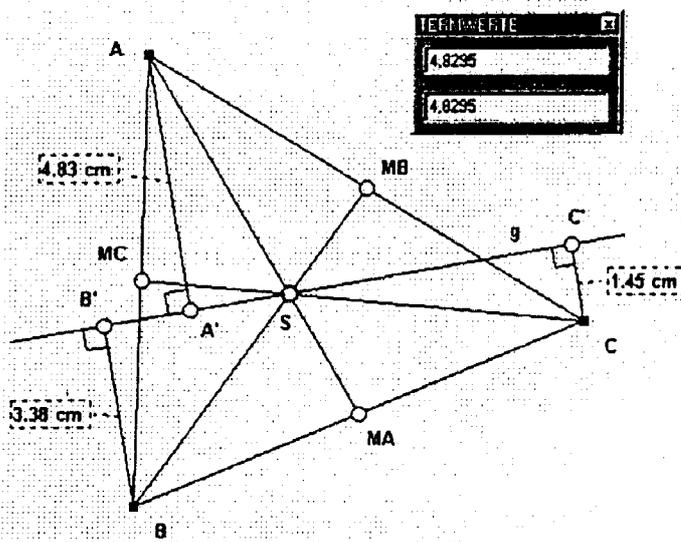
Koordinaten des (gewöhnlichen) Schwerpunktes eines Dreiecks, Erzeugung einer Ellipse durch Bewegung eines Stabes fester Länge (Ellipsenbewegung), Radlinie, Hüllkurve einer Geraden

Intuitiv verwendete Extremwerte:

Stillstand eines Bewegungsvorganges

Einschlägige Themenkreise:

Drehmoment, Momentensatz, Transport horizontaler Stäbe in einem Gangsystem



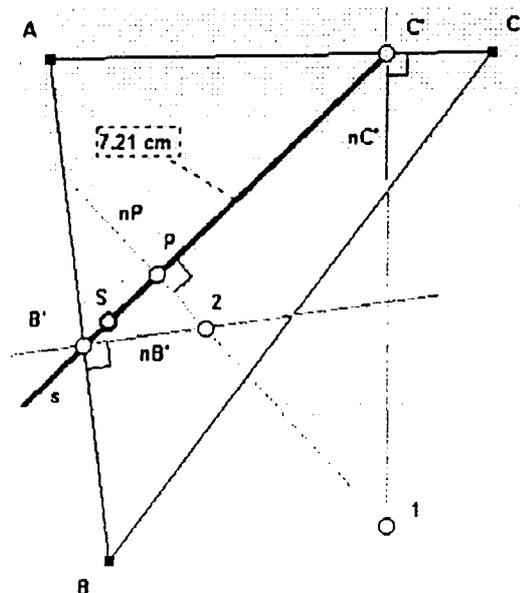
Die Summe der orientierten Abstände der Punkte A,B,C zu jeder Geraden g durch den „gewöhnlichen“ Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC ist Null: Die Rechnung ist trivial, falls S als Ursprung und g als x-Achse gewählt wird.

Die Aufgabe, jene Schwerlinie eines Dreiecks ABC zu suchen, welche innerhalb des Dreiecks die geringste Streckenlänge aufweist, zerlegen wir in Einzelaufgaben:

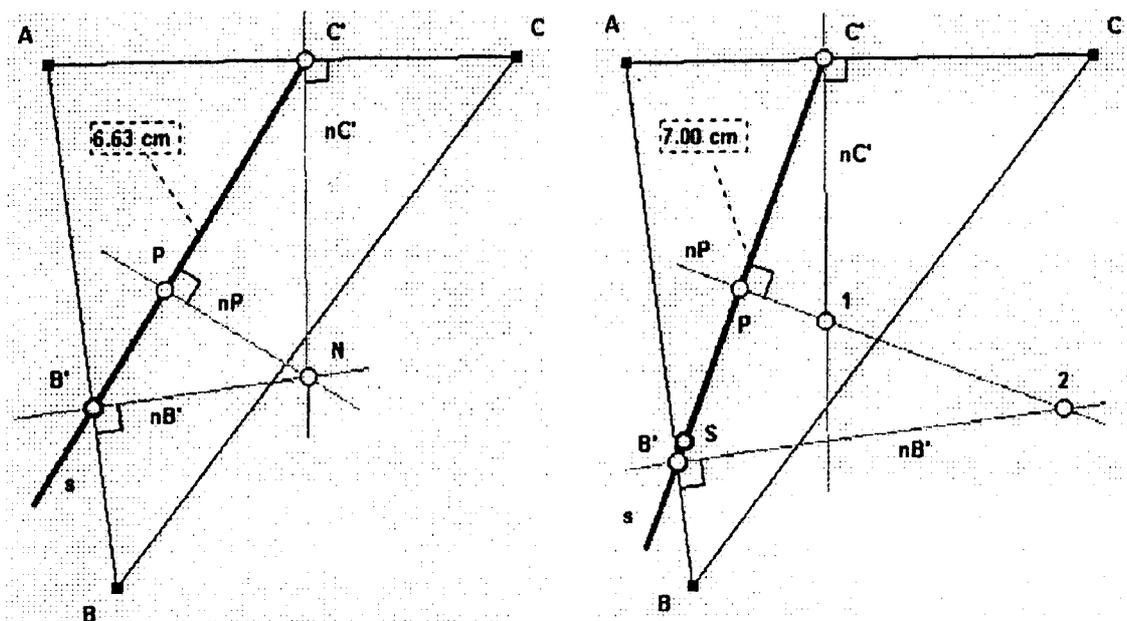
Gegeben sind die Geraden AB und AC sowie ein beliebiger Punkt P im

Winkelfeld CAB. Die Position jener Geraden durch P, welche innerhalb des Winkelfeldes die kürzeste Strecke trägt, finden wir kinematisch.

Wir führen den Stab s im Lagerpunkt C' auf AC und lassen s durch eine in P drehbare Öse gleiten: Das momentane Drehzentrum (Momentanpol) von s gegenüber der festen Bezugsebene fällt daher in den Punkt 1. Der Stab s gleitet weiters durch eine in B' drehbar gelagerte Öse, welche ihrerseits längs AB geführt wird. Der Momentanpol dieser zweiten Öse gegenüber der Bezugsebene liegt daher im Punkt 2.



Genau dann trägt s den kürzesten Abschnitt innerhalb des Dreiecks, wenn das Gleiten von s durch die Öse in B' zum Stillstand kommt, wenn also die Pole 1 und 2 zusammenfallen.



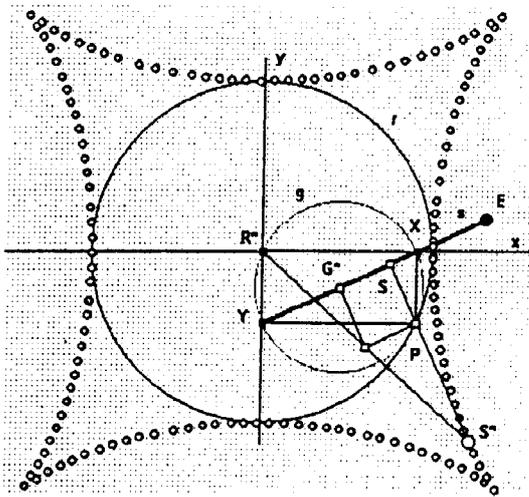
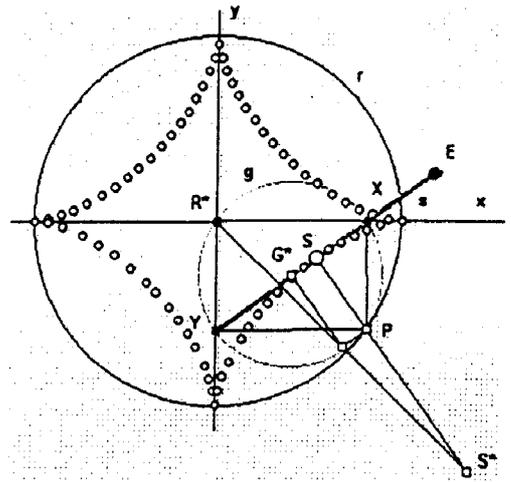
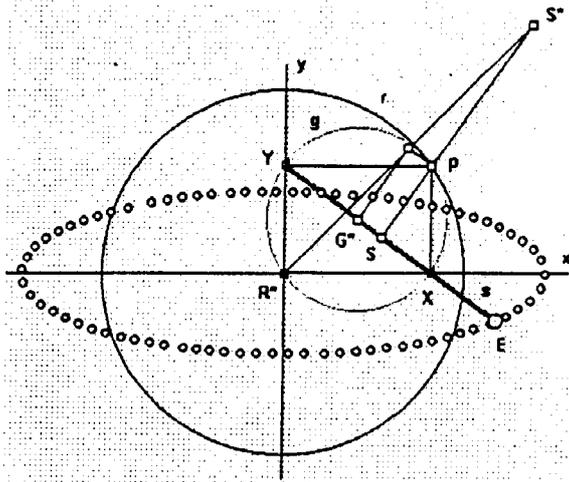
Die mit EUKLID kinematisch gefundene **minimale Stablänge C'S** im beweglichen Stab s durch den Punkt P wird in der Bildserie vor, im und nach dem Durchgang durch die Extremlage ($B'=S$, mittlere Figur) gezeigt. Diese Position von s wird durch **kopunktales Lage** der Normalen n_A , n_B und n_P gekennzeichnet. Der **Rechenansatz** ist daher festgelegt:

Etwa nach Wahl von A als Ursprung und der Geraden AB als x -Achse läßt man den Punkt C' mit einem Parameter λ in der Geraden AC laufen. Damit sind zunächst die Gerade $s = PC'$ und dann die drei Normalen n_A , n_B und n_P bestimmt. Die kopunktales oder parallele Lage von drei Geraden $a_i x + b_i y + c_i = 0, i=1,2,3$, ist durch $\text{Det} \left((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) \right) = 0$ gekennzeichnet, aber natürlich können die Punkte 1,2 und $n_A \cap n_B$ auch explizit berechnet werden. Es entsteht eine kubische Gleichung in λ , was die Existenz einer reellen Geraden durch P bestätigt, welche innerhalb des Winkelfeldes CAB minimale Länge aufweist.

Je nach Auswahl von zwei Dreieckseiten als Führungsgeraden des Stabes s durch den beliebig gewählten Punkt P existieren daher drei Stabpositionen durch P , welche aus dem Dreieck ABC **relativ minimale** Streckenlängen ausschneiden. Die Spezialisierung von P zum Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks führt im allgemeinen zu keiner Vereinfachung des Problems.

Konstruktion dieser kürzesten Strecke mittels einer kinematisch festgelegten „schönen“ Kurve, vgl. etwa die *Winkeldreiteilung* unter Verwendung einer *Quadratrix (Hippias)* oder *Conchoide (Nicomedes)* sowie die *Würfelverdopplung* mit Hilfe einer *Cissoide (Diocles)* oder eines Paares *Kreis/Parabel (Descartes)*:

Wird ein Stab s fester Länge XY so geführt, daß X in einer Geraden x und y in einer dazu orthogonalen Geraden y gleitet, so beschreibt jeder mit s fest verbundene Punkt E eine Ellipse. Diese **Ellipsenbewegung** wird auch beim Abrollen des Gangkreises g (Durchmesser XY) im doppelt so großen Rastkreis r erfaßt. Der Berührungspunkt P von g und r gibt den Momentanpol des bewegten Systems gegenüber dem festen Bezugssystem ab: Ellipsen sind also spezielle Radlinien.



Der Stab s ist ein Durchmesser von g und hüllt eine **Astroide** ein, der Berührungspunkt S fällt in den Normalenfußpunkt aus P in s .

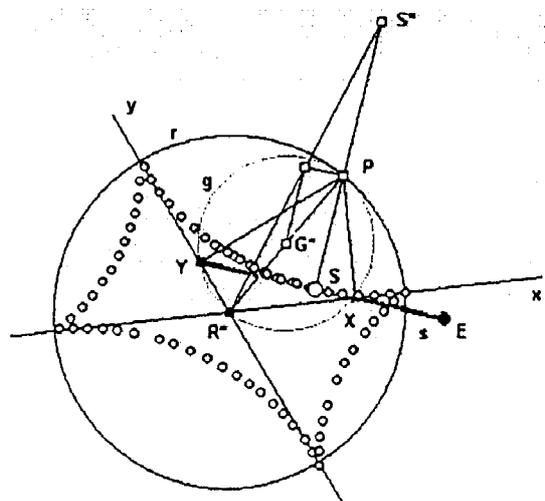
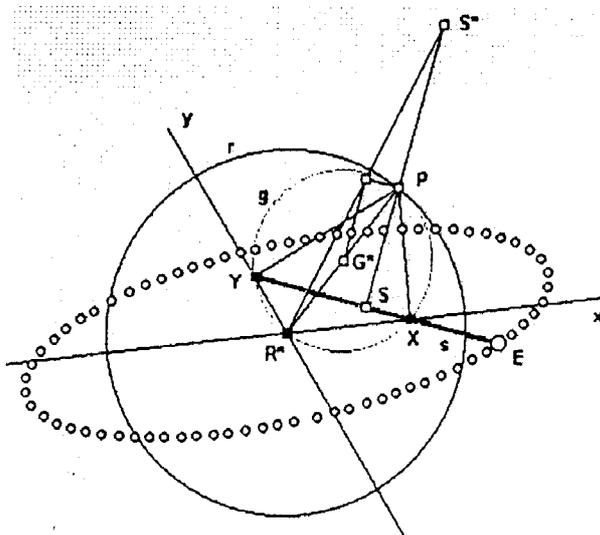
Die Gleichung der Astroide lautet (mit $d = XY$)

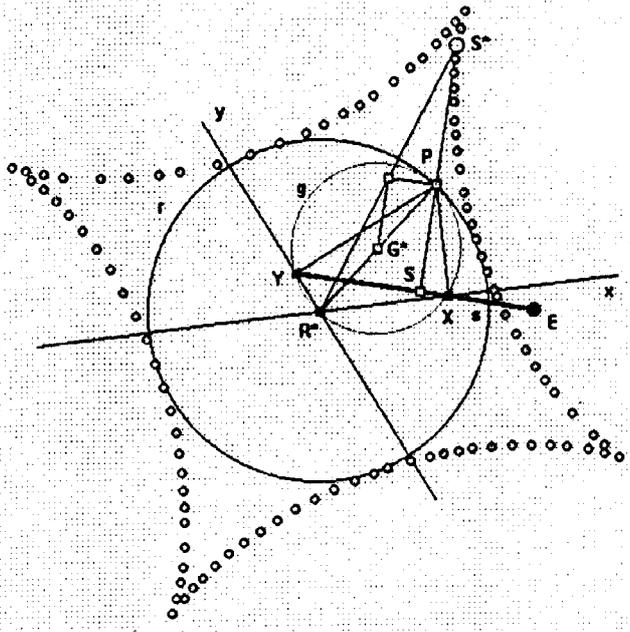
$$x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$$

Je zwei Astroiden sind zentrisch ähnlich.

Die dritte Figur zeigt die Evolute dieser Hüllkurve: Diese ist wieder eine Astroide.

Die orthogonale Lage der Ausgangsgeraden x und y ist aber nicht wesentlich: Wird der Stab s fester Länge XY so geführt, daß die Geraden x und y nicht orthogonal zueinander liegen, so liegt ebenfalls eine Ellipsenbewegung, also das Abrollen des Gangkreises g in einem doppelt so großen Rastkreis r , vor.



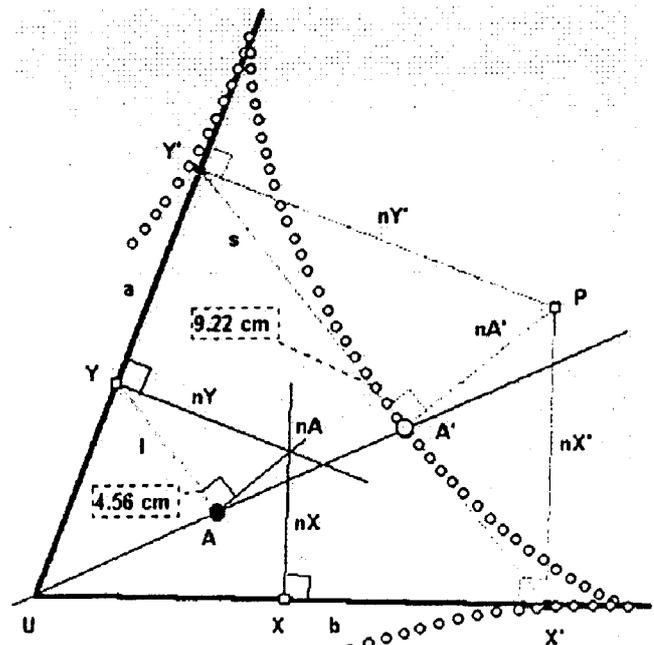
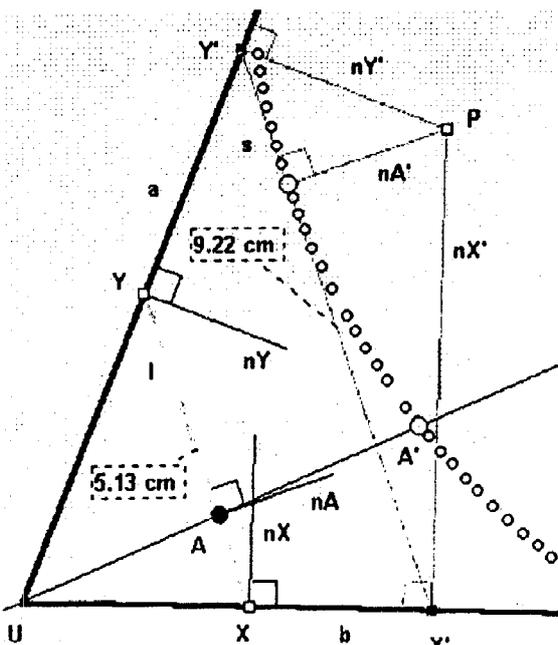


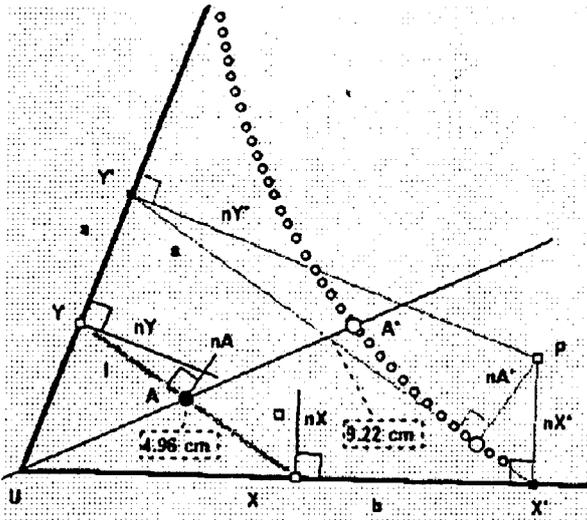
Der Stab s ist jetzt kein Durchmesser von g . Seine Hüllkurve ist eine Parallelkurve jener Astroide, welche als Hüllkurve des zu s parallelen Durchmessers von g eingehüllt wird, man spricht daher von einer **Parastroide**. Je zwei Parastroiden mit denselben Ausgangsgeraden x und y sind zentrisch ähnlich.

Die Evolute einer Parastroide ist ebenfalls eine Parastroide.

Nun können wir die eingangs gestellte Aufgabe **graphisch lösen** (Die Bezeichnungen beziehen sich auf die folgende Bildserie):

- 1) Wir wählen die Punkte $X' \in a$ und $Y' \in b$ beliebig, aber aus Gründen der Genauigkeit so, daß die Strecke $X'Y'$ länger ist als die zu erwartende minimale Strecke durch A .
- 2) Nun werden die Punkte X' in a und Y' in b derart geführt, daß $X'Y'$ konstant bleibt – es liegt also eine Ellipsenbewegung mit im allgemeinen nichtorthogonalen Trägergeraden vor.
- 3) Die durch Punkte, Tangenten und Krümmungskreise definierte Hüllkurve der festen Strecke $X'Y'$ – also eine Parastroide – schneidet die Gerade UA im Punkt A' . Die zur Tangente s der Parastroide in A parallele Gerade l durch A ist die Lösungsgerade des gestellten Problems.





Die drei Figuren zeigen einerseits die feste Tangentenstrecke s der Parastroide zwischen den Geraden a und b sowie andererseits die zu diesen Tangenten jeweils parallele Gerade l durch A , deren Strecke innerhalb a und b nichtkonstant ist und minimal genau dann wird, falls sie die zur Tangente der Parastroide im Punkt A' parallele Lage einnimmt (mittlere Figur).

Die Normalen $n_{A'}$, $n_{X'}$ und $n_{Y'}$ sind bei der Parastroide stets kopunktal, die Normalen n_A , n_X und n_Y bei der parallel mitgeführten Geraden l nur in der mittleren Figur: Die nichtkonstante Strecke XY führt natürlich keine Ellipsenbewegung aus!

Parastroiden sind, wie die Astroiden, algebraische Kurven der Ordnung sechs. Die Bestimmung der Schnittpunkte mit der Geraden UA' durch das Symmetriezentrum U ist daher nur eine Aufgabe dritter Ordnung.

Zusatzinformation:

Der Eckenschwerpunkt eines konvexen Vierecks ist auch der Mittelpunkt des *Varignon-Parallelogramms*, welches von den Seitenmitten des Vierecks gebildet wird. Ein *Varignon-Parallelogramm* existiert übrigens auch für die drei windschiefen Vierseite, die von den Kanten eines Tetraeders gebildet werden.

3. Sehnenvierecke als Lösungen eines isoperimetrischen Problems

Die Aufgabenstellung lautet: Unter allen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen a, b, c, d ist jenes (sind jene) anzugeben, welche(s) maximalen Flächeninhalt besitzt (besitzen).

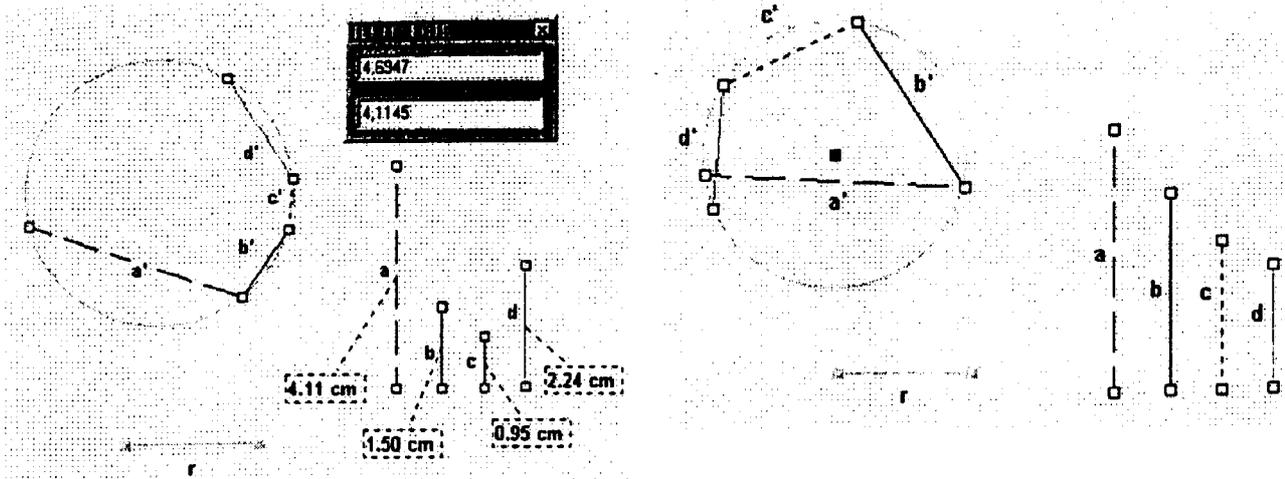
Es liegt also ein **isoperimetrisches Problem** vor. Die vielleicht älteste einschlägige Frage lautet: *Welche von allen einfach geschlossenen ebenen Kurven mit gegebenem Umfang u umschließt den größten Flächeninhalt?* Bereits den Griechen war der Kreis als Lösung dieses Satzes der globalen Differentialgeometrie „bekannt“, aber erst *K. Weierstraß* konnte 1870 den Beweis führen.

Von ähnlicher Art ist die folgende isoperimetrische Ungleichung für einfach geschlossene ebene Kurven vom Umfang u und mit dem berandeten Flächenbereich A :

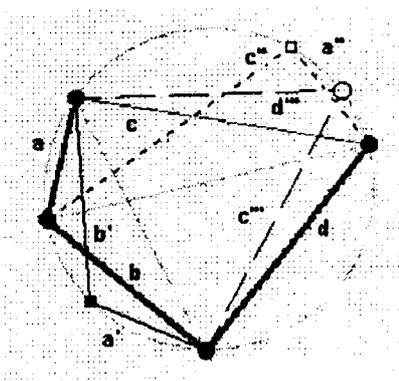
$$u^2 - 4\pi A \geq 0, \text{ und das Gleichzeichen gilt genau im Fall des Kreises.}$$

Unmittelbar einsichtig ist die Formulierung isoperimetrischer Problemstellungen in der Raumgeometrie: Es kommen dann Volumina, Flächeninhalte, Längen, Winkelmaße usw. vor.

Geometrisches Werkzeug:	Flächeninhalt eines Dreiecks gemäß $ab/2 \sin \gamma$, $ \cos \alpha \leq 1$, Peripheriewinkelsatz, Sehnenvierecke sind durch supplementäre Gegenwinkelpaare gekennzeichnet
Intuitiv verwendete Extremwerte:	Keine
Einschlägige Themenkreise:	Heron'sche Flächenformel, Formel von Brahmagupta



Das Erfülltsein der einen Ungleichung $a \leq b+c+d$ ist natürlich nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Sehnenvierecks mit den Seitenlängen a, b, c, d . Diese Ungleichungen lassen sich mit EUKLID durch Abtragen der vier Streckenlängen a, b, c, d als Sehnen eines Kreises mit dem variablen Radius r schülergerecht visualisieren.



Zu einem gegebenen Sehnenviereck existieren noch zwei weitere Realisierungen der Seitenanordnungen zu Sehnenvierecken, und diese drei Sehnenvierecke sind im allgemeinen paarweise verschieden.

Der Flächeninhalt A eines Vierecks kann aus den vier Seitenlängen a, b, c, d sowie der Winkelsumme $\alpha + \gamma$ eines Gegenwinkelpaares berechnet werden (*verallgemeinerte Formel von Brahmagupta*):

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2((\alpha + \gamma)/2),$$

$$s = (a+b+c+d)/2$$

Genau im Falle von Sehnenvierecken bleibt nur der linke Summand über, und das ist die *Formel von Brahmagupta* (vgl. auch die *Formel von Heron* für Dreiecke).

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes besitzt ein ebenes Viereck genau dann einen Umkreis, falls die Summe eines Gegenwinkelpaares das Winkelmaß 180° besitzt (Dann tritt beim anderen Gegenwinkelpaar als Summe ebenfalls 180° auf, da die Summe der Innenwinkelmaße von n -Ecken in der euklidischen Ebene $(n-2) \cdot \pi$ beträgt). Unter Verwendung der *verallgemeinerten Formel von Brahmagupta* erhalten wir daher ohne weitere Rechnung:

Bei gegebenen Seitenlängen a, b, c, d besitzen die **Sehnenviereckrealisierungen** unter allen Vierecken mit diesen Seitenlängen den **größten Flächeninhalt**.

In ähnlicher Weise erkennt man die **Tangentenvierseite** als optimal: Unter den Vierseiten mit gegebenen Innenwinkelmaßen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$) und gegebenem Umfang besitzen die **Tangentenvierseite** den **größten Flächeninhalt**.

4. Eine isoperimetrische Aufgabe über Dreikante

Geometrisches Werkzeug:	Flächeninhalt eines Dreiecks gemäß $ab/2 \sin \gamma$, Volumen eines Tetraeders gemäß $Ah/3$, $ \sin \alpha \leq 1$
Intuitiv verwendete Extremwerte:	Normalabstand Punkt - Gerade, Normalabstand Punkt - Ebene
Einschlägige Themenkreise:	Wirtschaftlichkeit von Verpackungen

Von einem Punkt gehen drei Stäbe mit fester Längensumme u aus. Welche Konfiguration beschreibt dieses Dreikant, falls das Volumen des dadurch umschlossenen Tetraeders maximal ist? Es sind also einerseits die Stablängen a, b und c und andererseits die Kantenwinkel α (zwischen b und c), β (zwischen c und a) und schließlich γ (zwischen a und b) für die extremale Position anzugeben (Bezeichnungsmäßig soll zwischen dem Stab a und seiner Länge a nicht unterschieden werden).

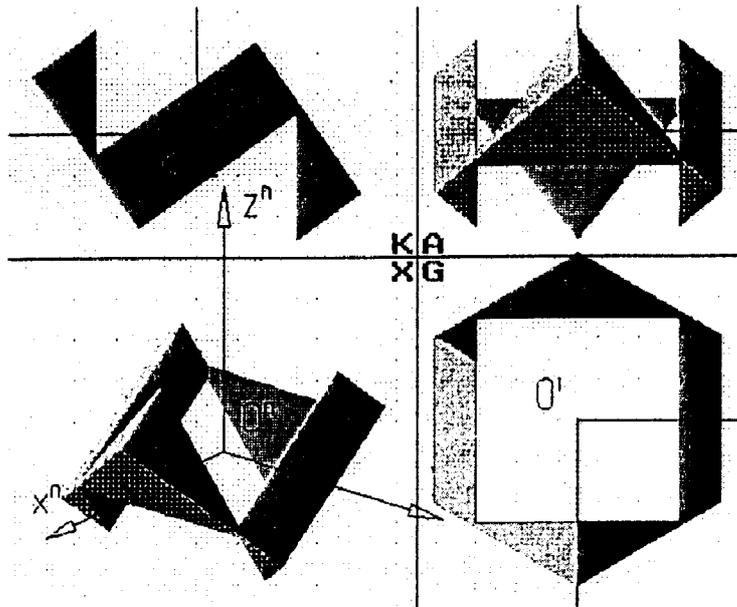
Im **ersten Schritt** wählen wir eine **beliebig Zerlegung** von u der Form $u = a + b + c$ (natürlich $a, b, c \geq 0$). Wir fassen etwa die durch die Stäbe a und b aufgespannte Ebene als Basis des Tetraeders auf. Das Volumen berechnet sich dann zu $V = abh/6 \sin \gamma$, wobei der Normalabstand des Endpunktes von c zur Basisebene die Tetraederhöhe h liefert. Für jedes Tripel a, b, c wird V genau dann maximal, falls erstens der Winkel γ zwischen a und b ein rechter Winkel ist und zweitens der Stab c orthogonal zur Basisebene ab liegt, also die Höhe h dann die Länge von c annimmt. Bei **jeder Auswahl von a, b, c** (≥ 0) besitzt das Tetraeder daher genau dann maximales Volumen, falls die **Stäbe paarweise orthogonal** sind.

Im **zweiten Schritt** haben wir zu klären, **welche Zerlegung $u = a + b + c$** (≥ 0) dann insgesamt das maximale Volumen liefert. Unter Verwendung der schon von *Euklid* in den „Elementen“ gelösten Aufgabe über isoperimetrische Rechtecke - übrigens einer einschlägigen Standardaufgabe bei der Behandlung der Extremwertaufgaben im Schulunterricht - erkennen wir, daß das rechtwinkelige Basisdreieck genau im Falle $a = b$ maximale Fläche erreicht. Wegen der Gleichwertigkeit der drei Seitendreiecke liefert also genau das Tripel $a = b = c = u/3$ maximales Tetraedervolumen. Also ist die Kantenkonfiguration in einer **Ecke eines Würfels** von der Seitenlänge $u/3$ die Lösung des gestellten isoperimetrischen Problems.

5. Prinz Rupert von der Rheinpfalz

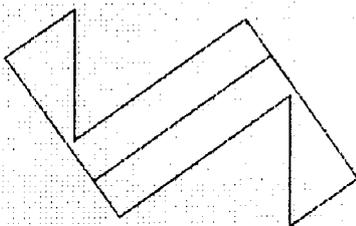
J.H.van Swinden's, gewesenen Professors der Mathematik, Physik und Astronomie zu Amsterdam, Mitgliedes mehrerer gelehrten Gesellschaften, Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C.F.A.Jacobi, Professor an der Landesschule Pforta:

Die Betrachtung der regelmäßigen Polyeder kann zu mancherlei Fragen und Aufgaben führen. Bemerkenswerth ist diejenige, welche zuerst Prinz Rupert oder Robert, aus dem Hause der Rheinischen Pfalzgrafen aufstellte und practisch löste, die später Wallis einer wissenschaftlichen Untersuchung unterwarf, und zuletzt Nieuwland erweiterte und vollendete. Die Aufgabe, in ihrer ursprünglichen Gestalt, war folgende: Aus einem Würfel ein Stück so auszuschneiden, daß man durch das so entstandene Loch einen anderen, eben so großen Würfel, als der gegebene ist, hindurch schieben kann. Nachdem man sich später überzeugt hatte, daß der Schnitt so geführt werden könnte, um sogar einen größeren Würfel, als den gegebenen, durch die entstandene Öffnung hindurchzuschieben, suchte man den möglich größten unter allen zu bestimmen. Wir wollen in einem besondern Anhang am Schlusse die desfallsige kurze Abhandlung dieses wackeren Mathematikers mittheilen (Seite 384ff und 542ff).

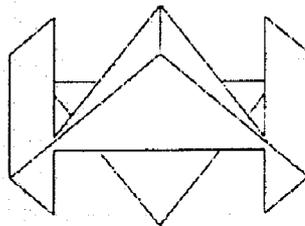


5.1 Eine naive Schülerfrage und ein instruktiver Irrtum

Geometrisches Werkzeug:	Sehr gute Raumvorstellung, Pythagoräischer Lehrsatz, ähnliche Figuren
Intuitiv verwendete Extremwerte:	Wenn ein Schacht durch ein Objekt nicht mehr wackeln kann, so hat er maximalen Querschnitt
Einschlägige Themenkreise:	Polyedergeometrie

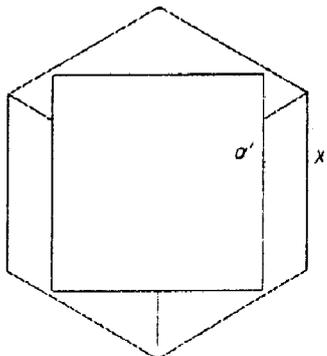
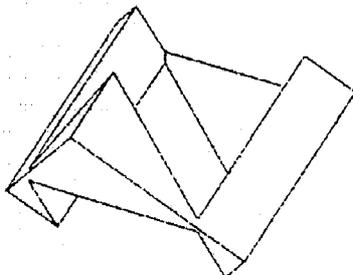


Kantlänge 5



Winkel $\alpha' : x' : 0^\circ$ $V_{\text{Rest}} = 36,6976$

Relatives Minimum

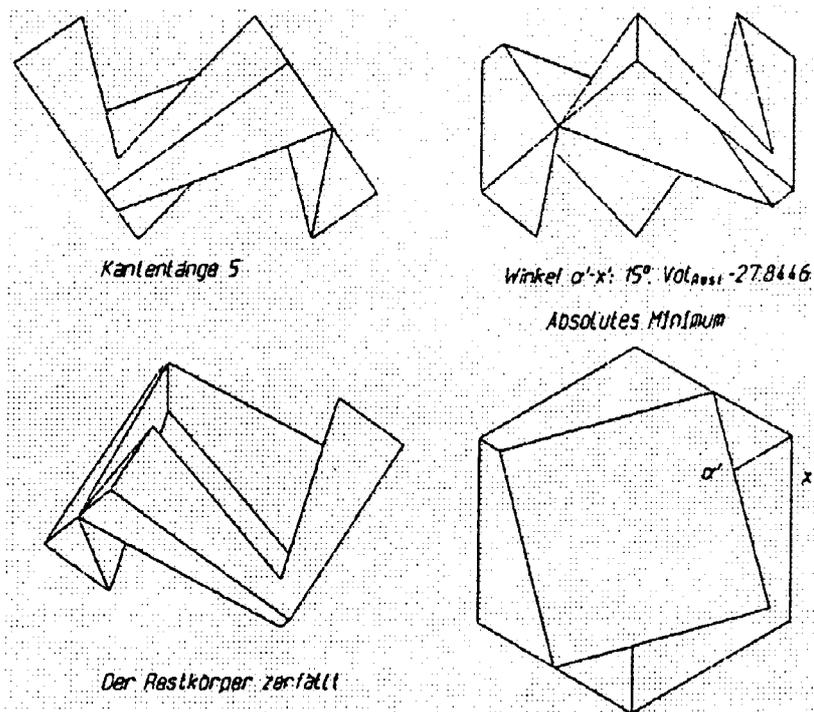


Anlässlich des Tages der offenen Türe am 30.9.1998 stellten wir das Modell „Ein Würfel W_2 kann durch einen kongruenten Würfel W_1 geschoben werden, ohne daß der Restkörper zerfällt“, aus. Die Schiebung verläuft bei diesem Modell in Richtung der Raumdiagonalen von W_1 , eine Seitenebene α von W_2 ist parallel zu einer Kante x von W_1 und schließlich enthält die lotrechte Achse des prismatischen Schachtes den Mittelpunkt von W_1 . Die Figuren zeigen jeweils den im Würfel W_1 verbleibenden Restkörper.

Die Kantenlänge der Würfel wird mit a bezeichnet, den Volumsberechnungen liegt $a=5$ zugrunde.

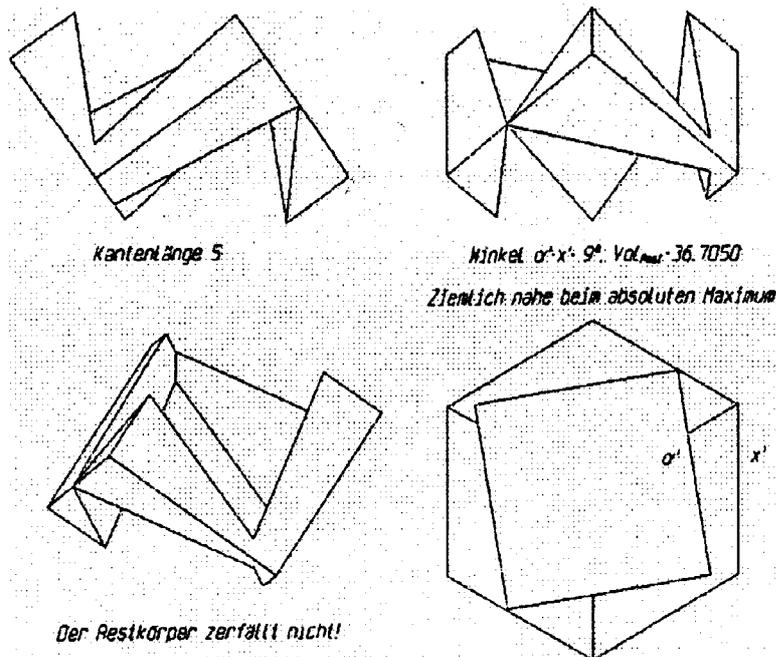
Die vom (weggeschnittenen) höchsten Punkt Z von W_1 ausgehenden drei Kanten sind wegen ihrer Symmetrielage zur lotrechten Raumdiagonalen gleich gebösch. Jede Würfelkanten ist zu einer dieser drei Geraden parallel. Alle Würfelkanten sind daher gleich gebösch und besitzen Grundrisse derselben Länge a' . Die äußere Berandung des Grundrisses des Würfels gibt deshalb zu einem regelmäßigen Sechseck Anlaß.

Der Würfel W_1 wird von einer lotrechten Ebene, welche durch eine Kante durch den höchsten Punkt Z verläuft, nach einem Rechteck geschnitten, dessen zweite Seite die Länge $a\sqrt{2}$ einer Flächendiagonalen aufweist. Die Grundrißstrecke a' tritt als Höhe im halben Rechteck auf und



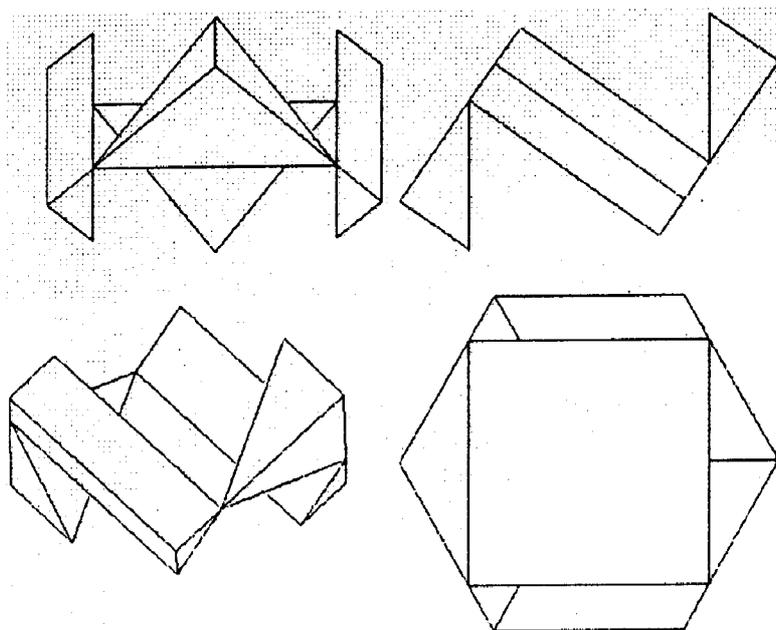
hat die Länge $a' = a\sqrt{6}/3$. Der Inkreisradius ρ des regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a' berechnet sich zu $\rho = a\sqrt{2}/2$, stimmt also mit dem Umkreisradius des prismatischen Schachtes mit quadratischem Querschnitt des Würfels W_2 überein. Dieser Schacht kann daher um die z-Achse gedreht werden, ohne daß der Restkörper zerfällt. Beim Durchgang einer Prismenkante durch die Berührungspunkte des Inkreises mit dem Sechseck besteht der Restkörper aus zwei Teilen, welche aber in zwei Punkten zusammenhängen. Diese Situation wollen wir auch noch als „Nichtzerfallen des Restkörpers“ akzeptieren. Dies tritt erstmals bei einer Drehung um 15° auf.

Ein Schüler fragte, in welcher Position, also bei welchem Drehwinkel φ , der Restkörper maximales Volumen aufweist. Aufgrund meiner Erfahrung dachte ich natürlich an symmetrische Positionen, also etwa an $\varphi=0^\circ$ oder $\varphi=15^\circ$ - doch weit gefehlt! Durch Anzeigenlassen des Volumens mit dem Zeichenpaket CAD-3D hat sich gezeigt: Bei der Ausgangsposition ($\varphi=0^\circ$) tritt ein relatives Minimum des Volumens auf. Bei etwa 9° existiert ein absolutes Maximum, und bei $\varphi=15^\circ$ kommt es zu einem absoluten Minimum.



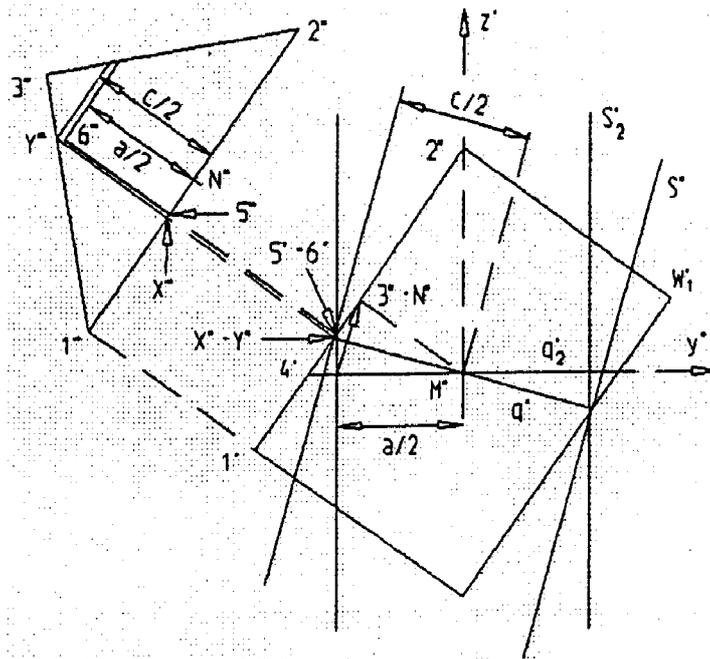
5.2 Vergrößerungen des Würfels W_2 , der durch W_1 geschoben werden kann

Aus den voranstehenden Figuren erkennt man, daß die Kantenlänge von W_2 noch vergrößert werden kann, ohne daß deshalb der Restkörper von W_1 zerfällt. Es stellt sich daher die Frage nach dem inhaltsgrößten Würfel W mit dieser Eigenschaft.



Für eine erste naheliegende Vergrößerung von W_2 wird in der Ausgangslage (also $\varphi=0^\circ$) der quadratische Querschnitt so lange zentrisch vergrößert, bis die Winkelsymmetralen die Sechseckseiten treffen. Die dazu nötige Rechnung ist sehr einfach und ergibt für die Kante b des neuen Würfels W_2' dann $b = 2a\sqrt{6} / (3 + \sqrt{3})$. Wir konnten daher eine Kantenvergrößerung um etwa 3,5% und eine Vergrößerung des Volumens um etwa 11% erreichen. Beim Durchschieben dieses Würfels W_2' durch W_1 hängt der Restkörper von W_1 noch in vier Punkten zusammen.

Aber schon wie in 5.1 liegt die Vermutung nahe, daß durch Drehung der prismatischen Schachtachse um den Mittelpunkt von W_1 eine weitere Vergrößerung des durchschiebbaren Würfels W_2 erreicht werden kann - nicht immer sind die symmetrischen Lagen optimal!

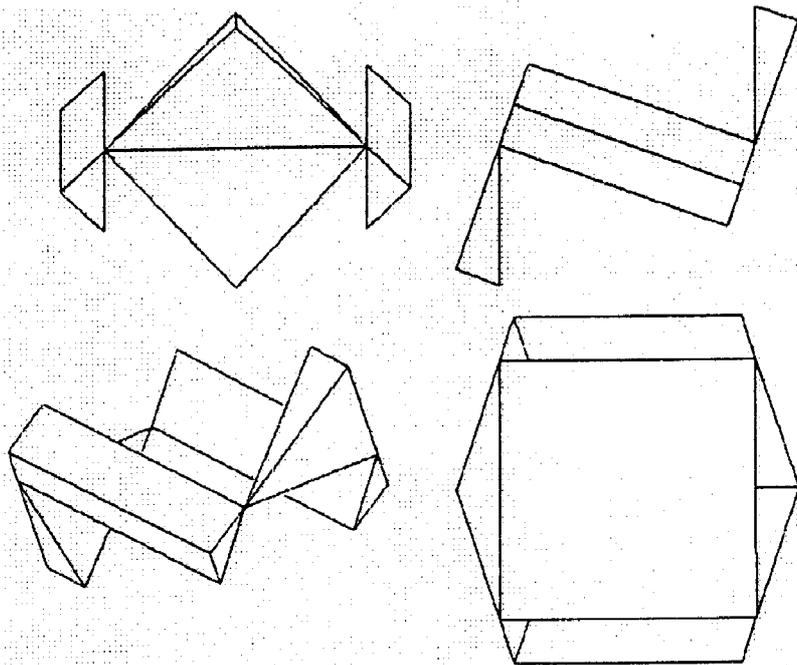


Die voranstehende Figur zeigt den Schnitt sowohl des Würfels W_1 als auch des vom kongruenten Würfel W_2 herrührenden z-parallelen prismatischen Schachtes S_2 (quadratischer Querschnitt q_2) mit der yz -Ebene. Bei Ansicht senkrecht zur linken Ebene 123 des Würfels (Seitenriß) erkennt man die Schnittgerade 56 der linken Ebene des Schachtes mit dieser Würfelebene. S_2 kann daher sowohl „ein Stück“ um die x -Achse als auch ein Stück um die jeweilige Schachtachse gedreht werden, ohne daß der Restkörper von W_1 zerfällt (erst für jene Drehung, welche die Ebene von q_2 durch den Würfelpunkt 3 führt, liegt W_1 vollständig im Schacht S_2 ; weiters liegt der Punkt 6 nicht in einer Würfelkante). Insgesamt kann S_2 daher um jede Gerade durch M ein Stück gedreht werden, ohne daß der Restkörper von W_1 zerfällt.

Zur Maximierung des Querschnittes von S_2 drehen wir den Schacht S_2 solange um die x -Achse in eine Position S , bis die linke Ebene von S die Ebene 123 des Würfels W_1 in einer solchen Geraden XY schneidet, für welche die Strecken MX und XY übereinstimmen: In dieser Position kann S dann weder um die x -Achse noch um die Schachtachse, daher also um gar keine Achse durch M gedreht werden, ohne daß der Restkörper von W_1 zerfällt. Die Querschnittebene q der gesuchten Schachtposition verläuft natürlich ebenfalls durch die Gerade XY . Der Restkörper hängt dann noch immer in vier Punkten zusammen.

Da das Dreieck 123 ein halbes Quadrat ist, wird der Punkt X in der Geraden 12 durch die Streckengleichheit $1X = XY = XM$ festgelegt, das Dreieck $1XM$ ist daher gleichschenkelig. Die Bestimmung des Abstandes r des Punktes 1 von der Geraden XY geschieht unter Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes und ergibt $r = 3a\sqrt{2} / 8$, also $3/8$ der Strecke von 1 zum Mittelpunkt N der Würfelebene 123. Die Länge r stellt natürlich auch die Hälfte der Kantenlänge c des gesuchten größten Schachtquerschnittes und damit des gesuchten größten Würfels W dar, welcher beim Durchschieben durch W_1 den Restkörper gerade noch in vier Punkten zusammenhängen läßt. Der gesuchte maximale Schacht S verläuft orthogonal zur Querschnittebene $q = MXY$.

Übrigens erkennen wir unter Verwendung von ähnlichen Dreiecken, daß die Querschnittebene q_2 des senkrechten Schachtes S_2 die Strecke $1N$ halbiert.



Die nebenstehende Figur zeigt diese Konfiguration, wobei die Achse von S lotrecht angenommen und der Würfel W_1 passend gedreht wurde:

Die Kantenlänge von W beträgt $c = 3a\sqrt{2}/4$, ist also um etwa 6,1% größer als jene von W_1 , die Volumenvergrößerung macht etwa 19,3% aus.

Die Querschnittebene von S schneidet die linke obere Ebene von W_1 in einer Parallelen zur horizontalen Flächendiagonalen, und zwar im $3/4$ -Abstand der unteren Quadratecke zum Quadratmittelpunkt.

Literatur:

- Berkhan, G., Meyer, W.F., Neuere Dreiecksgeometrie, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 3.Bd. Geometrie, 1173-1276
- Breunig, E., Die Formel von Brahmagupta oder: Das Problem des optimalen Hasenstalles, Wissenschaftlichen Nachrichten des BMUK 109, Jänner 1999, 25-27
- do Carmo, M.P., Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, 3. Aufl., vieweg studium, Braunschweig, 1993
- Coxeter, H.S.M., Geometry revisited, New Mathematical Library 19, The Mathematical Association of America, Yale University, 1967
- Coxeter, H.S.M., Unvergängliche Geometrie, Birkhäuser, 1963
- H. Dirnböck, Der Linienschwerpunkt eines Dreiecks, IBDG 2/1994, 14-20, Univ. Druckerei Innsbruck
- Donath, E., Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969
- Kaiser, H., Nöbauer, W., Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht, 2. Aufl., hpt, Wien, 1998
- Posamentier, A.S., Excursions in advanced Euclidean Geometry, Addison Wesley, 1984
- Quaisser, E., Sprengel, H.J., Räumliche Geometrie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981
- Reichel, H.-C., Müller, R., Lehrbuch der Mathematik 7,8, hpt, Wien
- Hanisch, G., Mathematik 3, Reniets Verlag, Wien
- Schalk, H.-C., u.a., Zu K. Schüttes Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon, Elem. Math. 46, 25-27, 1991
- Stachel, H., Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, Teubner, 1910
- R. Sturm, Theoremata geometrica. Accedunt problematum geometricorum libri quinque. (Cum tabulis aeneis.) - Amstelaedami, Hengst 1786
- Swinden, J.H. van, Deutsche Übersetzung von C.F.A. Jacobi: Elemente der Geometrie, Friedrich Frommann, Jena, 1834
- Wunderlich, W.; Ebene Kinematik, BI Hochschultaschenbücher, Bd. 447/447a*, Mannheim, 1970
- Zacharias, M., Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 3. Bd. Geometrie, 859-1172